15. Zeigen Sie mithilfe des binomischen Lehrsatzes

$$\sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l} \binom{n}{k-l} = \binom{m+n}{k}.$$

dabei sind $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq m+n$.

16. (a) Zeigen Sie, dass für positive a, b, c, d mit $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ gilt:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

(b) Zeigen Sie, dass für $x > 0$ gilt:

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq 1.$$

17. Wir betrachten die Menge $\mathbb{K} := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{Q}\}$ und definieren nun Addition und Multiplikation auf $\mathbb{K}$ als

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &:= (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)\\ (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) &:= (a_1 a_2 + 2 b_1 b_2,\ a_1 b_2 + b_1 a_2)\end{aligned}$$

(a) Ist $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ein Körper?

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 = (2, 0)$$

genau zwei Lösungen in $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ besitzt, die Gleichung

$$x^2 = (3, 0)$$

jedoch gar keine.

18. Betrachten Sie die Menge

$$M := \{(a_1, \ldots, a_k) \in \{1, 2, \ldots, n\}^k : a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k\}.$$

Bestimmen Sie $|M|$.

19. Seien A, B und C drei paarweise verschiedene Punkte auf einem Kreis mit Mittelpunkt M. Zeigen Sie, dass

$$2\sphericalangle ACB = \sphericalangle AMB$$

gilt, wenn $\sphericalangle ACB \leq 90°$. Folgern Sie daraus den Satz von Thales. Wie ist der Satz zu formulieren, wenn $\sphericalangle ACB > 90°$ gilt?

20. Eine natürliche Zahl $p > 1$ heißt Primzahl, wenn sie nur durch 1 und sich selbst (ohne Rest) teilbar ist. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.